تعريف :

لتكن $A$ جبري نوب الحلقة $R$ و $J، I$ مثاليتين جزئيتين في $A$ عندئذٍ $[I، J]$ مثالي جزئي في $A$

البرهان :

لتكن $J، I$ مثاليتين جزئيتين في $A$ لدينا حسب التعريف $[I، J]$ مولد جزئي في $A$ حيث $\langle L \rangle = [I، J]$

حيث $L = \{ [x، y] ; \; x \in I، y \in J \}$

لنبرهن أن $i \in I، a \in A$ في $c$ أن $\forall d \in D_{er}(A) \subset c$ $\overline{L}$

$$ d([I، J]) \subseteq [I، J] $$

نعلم أن $\langle L \rangle = [I، J]$ حيث $z \in [I، J]$

$x = \sum \lambda_i a_i ; \; \lambda_i \in R \quad a_i \in L$

$d(x) = d(\sum \lambda_i a_i)$

$= \sum d(\lambda_i a_i) = \sum \lambda_i d(a_i)$

بما أن $a_i \in L$ فإن $\exists x_i \in I، y_i \in J ; \; a_i = [x_i، y_i]$ فنحصل

$d(a_i) = d([x_i، y_i]) = [d(x_i)، y_i] + [x_i، d(y_i)]$

$d(x) = \sum \lambda_i d(a_i) = \sum_{\in I} \lambda_i [d(x_i)، y_i] + \sum_{\in J} \lambda_i [x_i، d(y_i)]$

$\in \langle L \rangle$

ومنه إن $d([I، J]) \subseteq [I، J]$

تعريف:
لتكن A جبر على الحلقة R، و I مثالي في A إذا كان $[I,I]=I$ عندئذٍ يكون I مشتقي من A

نظرية:
لتكن A مثالي مشتقي في A ويبقى A مستقر في A عند $d(I) \subseteq I$
$\forall d \in Der(A)$ لنظرية الجوبة

$$\mathcal{L} = \{[x,y] ; x,y \in I\}$$

ليكن $I = [I,I] = \langle \mathcal{L} \rangle$

$$\forall a \in I ; a = \sum \lambda_i x_i ; \lambda_i \in R ; x_i \in \mathcal{L}$$

$\in I$

$$x_i = [y_i, z_i] ; y_i, z_i \in I$$

$$d(a) = d\left(\sum \lambda_i x_i\right) = \sum d(\lambda_i x_i) = \sum \lambda_i d(x_i)$$

$$\Rightarrow d(x_i) = d([y_i, z_i]) = [d(y_i), z_i] + [y_i, d(z_i)]$$

$$= d_{(y_i)}(z_i) - [d(z_i), y_i]$$

$$= d_{d_{(y_i)}}(z_i) - d_{d_{(z_i)}}(y_i)$$

$\underbrace{\in A \quad \in I}_{\in I} \qquad \underbrace{\in A \quad \in I}_{\in I}$

$$\Rightarrow d(a) = \sum \lambda_i d(x_i) \in \langle \mathcal{L} \rangle = I$$

مثال:
لتكن R حلقة تبديلية واحدية مع ...
$$M_n(R) = \{(a_{ij}) ; a_{ij} \in R\}$$
جبر المصفوفات من الرتبة n، والتي عنصرها العام من ...

الحل:

<div dir="rtl">

لتكن $a_{ij}$ , $b_{ij} \in M_n(R)$

جمع معرف بحيث

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

إثبات أن $(M_n(R), +)$ زمرة جزئية تبادلية والعنصر الحيادي هو المصفوفة الصفرية

حيث أن كل $a_{ij} \in M_n(R)$ فإن $-a_{ij} = (-a_{ij})$ هو النظير الإضافي

</div>

$$\cdot : R \times M_n(R) \longrightarrow M_n(R)$$
$$(r, (a_{ij})) \longrightarrow (r \cdot (a_{ij})) = (r \cdot a_{ij})$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R \qquad a_{ij} \in M_n(R)$$

$$\textcircled{1} \quad (\lambda_1 + \lambda_2)(a_{ij}) = (\overbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}^{\in R}a_{ij}) = (\lambda_1 a_{ij} + \lambda_2 a_{ij})$$

$$= (\lambda_1 a_{ij}) + (\lambda_2 a_{ij})$$

$$\forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_n(R) \qquad \forall \lambda \in R$$

$$\lambda((a_{ij}) + (b_{ij})) = \lambda \cdot (a_{ij} + b_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij})$$

$$= (\lambda a_{ij}) + (\lambda b_{ij}) = \lambda(a_{ij}) + \lambda(b_{ij})$$

$$\forall \lambda, \mu \in R \qquad \forall a_{ij} \in M_n(R)$$

$$\lambda(\mu(a_{ij})) = \lambda(\mu a_{ij}) = (\lambda(\mu a_{ij}))$$

$$= ((\lambda\mu) \cdot a_{ij}) = (\lambda \cdot \mu)(a_{ij})$$

$$1 \cdot (a_{ij}) = (1 \cdot a_{ij}) = a_{ij}$$

<div dir="rtl">

ومنه فإن $M_n(R)$ فضاء شعاعي على $R$

</div>

$$\cdot M_n(R) \times M_n(R) \longrightarrow M_n(R)$$
$$(A, B) \longrightarrow A \cdot B = AB - BA$$

ومن أجل جعل الجدول $M_n(R)$ جبري نعرف عملية زمرية [ . ]

$$[ \, , \, ] : M_n(R) \times M_n(R) \longrightarrow M_n(R)$$
$$(A,B) \longrightarrow [A,B] = AB - BA$$

① $[A,A] = AA - AA = 0 \qquad \forall A \in M_n(R)$

② $\forall A,B,C \in M_n(R) : [A+B,C] =$
$$= (A+B) \cdot C - C(A+B)$$
$$= A \cdot C + BC - CA - CB$$
$$= [A,C] + [B,C]$$

بنفس الطريقة يكن اثبات الخاصية تربيعية اجمالية

$$[A, B+C] = [A,B] + [A,C]$$

$\forall \alpha \in R \quad [\alpha A, B] = (\alpha A) B - B(\alpha A)$
$$= \alpha(AB) - \alpha(BA)$$
$$= \alpha(AB - BA) = \alpha[A,B]$$

بنفس الطريقة نأخذ $[A, \alpha B] = \alpha[A,B]$

$\forall A,B,C \in M_n(R) \quad [A,[B,C]] = A \cdot [B,C] - [B,C] \cdot A$
$$= A(BC - CB) - (BC - CB)A$$
$$= \boxed{ABC - ACB - BCA + CBA} \quad ①$$

$[B,[C,A]] = B[C,A] - [C,A]B$
$$= B(CA - AC) - (CA - AC)B$$
$$= \boxed{BCA - BAC - CAB + ACB} \quad ②$$

$$[C, [A, B]] = C[A,B] - [A,B]C$$
$$= C(AB-BA) - (AB-BA)C$$
$$= CAB - CBA - ABC + BAC \quad \boxed{③}$$

في ①، ②، ③ نجد أن:
$$[A, [B,C]] + [B, [A,C]] + [C, [A,B]] = 0$$

يكون إذاً $M_n(R)$ جبري زمري على الحلقة $R$

مجموعات جبرية زمرية جزئية

تعريف:

ليكن $A$ جبري زمري على الحلقة الحلبية الواحدية $R$. لتكن $B, D$ مجموعتين جزئيتين من خلية $A$. نرمز بالرمز الآتي
$$[B,D] = \{ [b,d] \quad b \in B, \ d \in D \}$$

بأنه الوحيد $B$ و $D$ في $A$

نظرية:

ليكن $A$ جبري زمري على الحلقة $R$ و $B, D, k$ مجموعات جبرية زمرية جزئية من $A$ عندئذٍ:
$$[B,D] = [D,B] \quad ①$$
$$[B+D, k] = [B,k] + [D,k] \quad ②$$
$$[B, [k,D]] \subseteq [k, [D,B]] + [D, [B,k]] \quad ③$$
$$[B \cdot k, D] \subseteq [B,D] \wedge [k,D] \quad ④$$

الإثبات:
① لتكن $x \in [B,D]$ فإنه يوجد $b \in B$، $d \in D$ بحيث
$$x = [b,d] = -[d,b] = [-d,b] \in [D,B]$$
$$\qquad \underset{\in D}{} \quad \underset{\in B}{}$$

ومنه $[B,D] \subseteq [D,B]$ وبطريقة مماثلة نثبت الاحتواء المعاكس

② لِكُن $x \in [B+D, k]$ نُبَيِّن $x = [a, k]$ لِيكُن $a \in B+D$ $k \in k$

, اِذَن .......... $\forall b \in B$ $d \in D$ ; $a = b+d$

$x = [a, k] = [b+d, k] = [b, k] + [d, k] \in [B, k] + [D, k]$

ومنه $[B+D, k] \subseteq [B, k] + [D, k]$

لِيكُن .... $y \in [B, k] + [D, k]$ نُبَيِّن $y = x+z$ لِيكُن $x \in [B, k]$

$z \in [D, k]$ مستقيم

$x = [b, k_1]$ .......... $z = [d, k_2]$

$\forall \ b \in B \ , \ d \in D \ , \ k_1, k_2 \in k$

ربما تكون نُفَيِّه

$y = x+z = [b, k_1] + [d, k_2]$

$y = x+z = [b, k_1] - [d, k_1] + [d, k_1] + [d, k_2]$

$= [b-d, k_1] + [d, k_1+k_2] \in [B+D, k] + [D, k] \subseteq$

$[B+D, k]$

③ لِكُن $x \in [B, [k, D]]$ نُبَيِّن $x = [b, a]$ ; $b \in B$ $a \in [k, d]$

ربما $a = [k, d]$ ; $k \in k, d \in D$

$x = [b, a] = [b, [k, d]] = -[k, [d, b]] - [d, [b, k]]$

$\in [k, [D, B]] + [D, [B, k]]$

نُفِّهـــم تاماً بالطريقة

$\in$